

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«БЕЛОРЕЧЕНСКИЙ ИНДУСТРИАЛЬНО -ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
ТЕХНИКУМ»

Учебно – методическое пособие
по выполнению контрольных работ
для студентов заочного отделения
по учебной дисциплине ЕН.01 «Математика»

Автор учебно - методического пособия:
преподаватель математики БИТТ А.А.Косенко

г. Белореченск
2021 г.

Содержание

Раздел 1. Дифференциальное исчисление	стр
1. История возникновения дифференциального исчисления	3
2. Теоретическая часть (физический и геометрический смысл)	4
3. Основные формулы дифференцирования	6
4. Производная сложной функции	7
5. Примеры решения задач	8
Раздел 2. Интегральное исчисление	
1. Понятие первообразной	9
2. Основные свойства неопределенного интеграла	10
3. Формула Ньютона – Лейбница	11
4. Основные методы и приемы интегрирования	14
5. Таблица основных интегралов	17
Раздел 3. Задачи для самостоятельного решения	18

Раздел 1. Дифференциальное исчисление

1. История возникновения дифференциального исчисления

- Дифференциальное исчисление – это раздел математики, в котором изучаются производные и их применение к исследованию функций.
- Термин «производная» является буквальным переводом на русский язык французского слова *dérivée*, которое ввел в 1797 году Ж. Лагранж. Он же ввел современные обозначения и Г. Лейбниц говорил о дифференциальном отношении и обозначал производную как df/dx . Это обозначение встречается и в современной литературе.
- Производная – одно из фундаментальных понятий математики. Оно возникло в XVII в. в связи с необходимостью решения ряда задач из физики, механики и математики, но в первую очередь для определения скорости прямолинейного движения и построения касательной к кривой.
- Независимо друг от друга И.Ньютон и Г. Лейбниц разработали аппарат исчисления, которым мы пользуемся в настоящее время. Ньютон исходил в основном из задач механики (опирался на физическое представление о мгновенной скорости движения, считая его очевидным и, сводя к нему другие случаи производной), а Лейбниц по преимуществу исходил из геометрических задач (использовал понятие бесконечно малой). Исчисление, созданное Ньютоном и Лейбницем, получило название дифференциального исчисления.



Исаак Ньютон



Готфрид Вильгельм Лейбниц

2. Теоретическая часть (физический и геометрический смысл)

Чтобы понять, что такое **производная**, проведем аналогию с мгновенной скоростью (скоростью в данный определённый момент времени). Рассмотрим материальную точку, которая движется по прямой с переменной скоростью. Поскольку скорость точки все время меняется, мы можем говорить о ее скорости только в данный момент времени t_0 . Чтобы найти скорость точки в момент времени t_0 , рассмотрим маленький промежуток времени Δt . За этот промежуток времени точка пройдет расстояние Δs . Тогда скорость точки будет примерно равна $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Чем меньше промежуток времени Δt мы будем брать, тем точнее значение скорости мы получим. В пределе, при $\Delta t \rightarrow 0$, мы получим точное значение мгновенной скорости в момент времени t_0 :

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Аналогичным образом введем понятие **производной**.

Рассмотрим произвольную функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0 . Значение функции в этой точке равно $f(x_0)$. Возьмем приращение аргумента Δx . Значение функции в этой точке равно $f(x_0 + \Delta x)$. Получим приращение функции $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Физический смысл производной.

Итак, мы видим, что по аналогии с мгновенной скоростью, производная функции в точке x_0 показывает скорость изменения функции в этой точке.

Если зависимость расстояния от времени представляет собой функцию $s(x)$, то, чтобы найти скорость тела в момент времени t_0 , нужно найти значение производной функции $s(x)$ в точке t_0 :

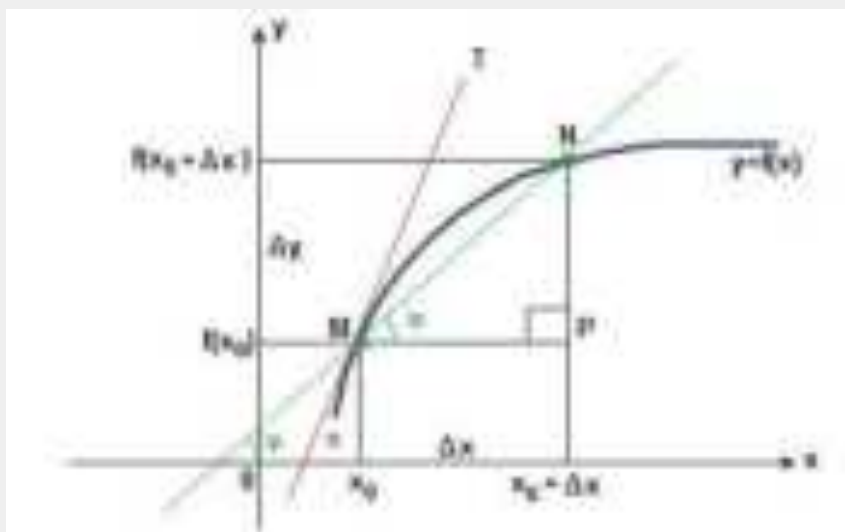
$$\varphi(t_0) = S'(t_0)$$

Геометрический смысл производной.

В координатной плоскости xOy рассмотрим график функции $y=f(x)$. Зафиксируем точку $M(x_0; f(x_0))$. Придадим абсциссе x_0 приращение Δx . Мы получим новую абсциссу $x_0 + \Delta x$. Это абсцисса точки N , а ордината будет равна $f(x_0 + \Delta x)$. Изменение абсциссы повлекло за собой изменение ординаты. Это изменение называют приращение функции и обозначают Δy .

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Через точки M и N проведем секущую MN , которая образует угол φ с положительным направлением оси Ox . Определим тангенс угла φ из прямоугольного треугольника MPN .

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{MP}{PN} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$



Пусть Δx стремится к нулю. Тогда секущая MN будет стремиться занять положение касательной MT , а угол φ станет углом α . Значит, тангенс угла α есть предельное значение тангенса угла φ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Определение производной. Предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при стремлении последнего к нулю, называют производной функции в данной точке:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Геометрический смысл производной заключается в том, что численно производная функции в данной точке равна тангенсу угла, образованного касательной, проведенной через эту точку к данной кривой, и положительным направлением оси Ox :

$$f'(x_0) = \tan \alpha \quad \text{или} \quad f'(x_0) = k$$

k – угловой коэффициент касательной.

3. Основные формулы дифференцирования

Процесс вычисления производных называют дифференцированием. Перед решением следующих задач стоит повторить формулы и правила дифференцирования функций.

Формулы дифференцирования функций

$(c)' = 0$	$(x)' = 1$		
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	
$(a^x)' = a^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$		
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$		
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила дифференцирования функций

$(u+v)' = u' + v'$	$(Cu)' = Cu'$	$(uv)' = u'v + v'u$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
--------------------	---------------	---------------------	---

Правила можно сформулировать и словами.

1. Производная суммы равна сумме производных.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак производной.
3. Производная произведения равна "производная первого сомножителя, умноженная на второй, плюс производная второго сомножителя, умноженная на первый".

4. Производная дроби равна "производная числителя, умноженная на знаменатель, минус производная знаменателя, умноженная на числитель, и деленные на знаменатель в квадрате".

4. Производная сложной функции

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Сложная функция:

Правило нахождения производной сложной функции

$$y'(f(x)) = y'(f) \cdot f'(x)$$

(производная сложной функции равна произведению производной функции на производную внутренней функции)

Простая функция	Производная простой функции	Сложная функция	Производная сложной функции
$\sin x$	$\cos x$	$\sin f(x)$	$\cos f(x) \cdot f'(x)$

Пример: 1) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ $\begin{cases} y = \sin f, \\ f = 2x - \frac{\pi}{3} \end{cases}$

$$y' = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)' = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$


Таблица производных сложных функций

1. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$	11. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
2. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	12. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
3. $(e^u)' = e^u \cdot u'$	13. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$	14. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
5. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	15. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$
6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	16. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$
7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	17. $(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$
8. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	18. $(\operatorname{th} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$
9. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	
10. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$	

5. Примеры решения задач

Пример 1

Вычислить производную функции $f(x) = -x^4 + 6x^3 + 5x + 23$.

$$f'(x) = (-x^4 + 6x^3 + 5x + 23)';$$

По правилу дифференцирования суммы:

$$(-x^4 + 6x^3 + 5x + 23)' = (-x^4)' + (6x^3)' + (5x)' + (23)'$$

Далее выносим за скобки числовые коэффициенты:

$$(-x^4)' + (6x^3)' + (5x)' + (23)' = -(x^4)' + 6(x^3)' + 5(x)' + (23)';$$

Переходим к формулам дифференцирования.

По формуле $(x^n)' = nx^{n-1}$:

$$(x^4)' = 4x^{4-1} = 4x^3;$$

$$(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2.$$

Для третьего слагаемого используем формулу $(x)' = 1$, а для последнего слагаемого формулу $(c)' = 0$ (производная константы равна нулю), т.е. $(23)' = 0$.

$$\text{Получим: } -(x^4)' + 6(x^3)' + 5(x)' + (23)' = -4x^3 + 6 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 1 + 0 = -4x^3 + 18x^2 + 5.$$

Следовательно: $f'(x) = -4x^3 + 18x^2 + 5$.

Пример 2

Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = (1/6)t^2 + 5t + 28$$

где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 6 м/с?

Найдем закон изменения скорости:

$$v(t) = x'(t) = \frac{1}{6} \cdot 2t + 5 = \frac{1}{3}t + 5 \text{ м/с}$$

Для того, чтобы найти, в какой момент времени t скорость была равна 3 м/с, необходимо решить уравнение:

$$\frac{1}{3}t + 5 = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{3}t = 1 \Leftrightarrow t = 3 \text{ м/с}$$

Ответ: 3

Пример 3

Найти производную сложной функции $y = \sqrt{x^2 - 3x + 17}$

Используем правила дифференцирования и таблицу производных сложных функций:

$$y' = \left(\sqrt{x^2 - 3x + 17} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3x + 17}} \cdot (x^2 - 3x + 17)' =$$

Ответ:

$$y' = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 17}}$$

Раздел 2. Интегральное исчисление

1. Понятие первообразной

Первообразной функции $f(x)$ на промежутке $(a; b)$ называется такая функция $F(x)$, что выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ для любого x из заданного промежутка.

Если принять во внимание тот факт, что производная от константы C равна нулю, то справедливо равенство . Таким образом, функция $f(x)$ имеет множество первообразных $F(x)+C$, для произвольной константы C , причем эти первообразные отличаются друг от друга на произвольную постоянную величину.

Определение неопределенного интеграла.

Все множество первообразных функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом этой функции и обозначается $\int f(x) dx = F(x) + C$.

Выражение $f(x) dx$ называют **подынтегральным выражением**, а $f(x)$ — **подынтегральной функцией**. Подынтегральное выражение представляет собой дифференциал функции $f(x)$.

Действие нахождения неизвестной функции по заданному ее дифференциалу называется *неопределенным* интегрированием, потому что результатом интегрирования является не одна функция $F(x)$, а множество ее первообразных $F(x)+C$.

Геометрический смысл неопределенного интеграла. График первообразной $D(x)$ называют интегральной кривой. В системе координат xOy графики всех первообразных от данной функции представляют семейство кривых, зависящих от величины постоянной C и получаемых одна из другой путем параллельного сдвига вдоль оси Oy . Для примера, рассмотренного выше, имеем:

$$\int 2x dx = x^2 + C.$$

$$\int 2x^{\wedge}x = x^2 + C.$$

Семейство первообразных $(x + C)$ геометрически интерпретируется совокупностью парабол.

Если из семейства первообразных нужно найти одну, то задают дополнительные условия, позволяющие определить постоянную C . Обычно с этой целью задают начальные условия: при значении аргумента $x = x_0$ функция имеет значение $D(x_0) = y_0$.

Пример. Требуется найти ту из первообразных функции $y = 2x$, которая принимает значение 3 при $x_0 = 1$.

$$\int 2x dx = x^2 + C; 1^2 + C = 3; C = 2.$$

Искомая первообразная: $D(x) = x^2 + 2$.

Решение. $\int 2x^{\wedge}x = x^2 + C; 1^2 + C = 3; C = 2$.

2. Основные свойства неопределенного интеграла

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d \int f(x) dx = f(x) dx$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме самой этой функции и произвольной постоянной:

$$\int df(x) = f(x) + C, \text{ где } C \text{ — произвольная постоянная}$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^c f(x) dx = a \int_a^c f(x) dx, \text{ причем } a \neq 1;$$

5. Интеграл суммы (разности) равен сумме (разности) интегралов:

$$\int_a^c (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^c f(x) dx \pm \int_a^c g(x) dx$$

6. Свойство является комбинацией свойств 4 и 5:

$$\int_a^c (f(x) \pm b \cdot g(x)) dx = a \int_a^c f(x) dx \pm b \int_a^c g(x) dx, \text{ причем } a \neq 0, b \neq 0$$

7. Свойство инвариантности неопределенного интеграла:

$$\text{Если } \int_a^c f(x) dx = F(x) + C, \text{ то } \int_a^c f(u(x)) du(x) = F(u(x)) + C_{const}$$

8. Свойство:

$$\text{Если } \int_a^c f(x) dx = F(x) + C, \text{ то } \int_a^c f(x) dx = \frac{1}{b} \int_a^c f(bx) dx + C_{const}$$

Фактически данное свойство представляет собой частный случай интегрирования при помощи метода замены переменной, который более подробно рассмотрен в следующем разделе.

Рассмотрим пример:

$$\begin{aligned} \int_1^2 (4x^2 - 6x + 19) dx &= \int_1^2 4x^2 dx + \int_1^2 (-6x) dx + \int_1^2 19 dx = 4 \int_1^2 x^2 dx - 6 \int_1^2 x dx + \int_1^2 19 dx = \\ &= 4 \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 - 6 \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + 19 \left[x \right]_1^2 = \frac{4}{3} (2^3 - 1^3) - 3 (2^2 - 1^2) + 19 (2 - 1) = \frac{4}{3} (8 - 1) - 3 (4 - 1) + 19 = \frac{4}{3} \cdot 7 - 3 \cdot 3 + 19 = \frac{28}{3} - 9 + 19 = \frac{28}{3} + 10 = \frac{58}{3} \end{aligned}$$

3. Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $F(x)$ - одна из первообразных функции на

этом отрезке, тогда справедлива **формула Ньютона-Лейбница**: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Формулу Ньютона-Лейбница называют **основной формулой интегрального исчисления**.

Для доказательства формулы Ньютона-Лейбница нам потребуется понятие интеграла с переменным верхним пределом.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то для аргумента $x \in [a; b]$ интеграл

$$\int_a^x f(t) dt$$

вида является функцией верхнего предела. Обозначим эту

функцию $\int_a^x f(t) dt = \Phi(x)$, причем эта функция непрерывная и справедливо

равенство $\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = \Phi'(x) = f(x)$.

Действительно, запишем приращение функции $\Phi(x)$, соответствующее приращению аргумента Δx и воспользуемся пятым свойством определенного интеграла и следствием из

$$\begin{aligned} \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(c) \cdot (x + \Delta x - x) = f(c) \cdot \Delta x \end{aligned}$$

десятого свойства: где $c \in [x, x + \Delta x]$.

$$\frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = f(c)$$

Перепишем это равенство в виде $\frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = f(c)$. Если вспомнить определение производной функции и перейти к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, то получим $\Phi'(x) = f(x)$. То есть, - это одна из первообразных функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Таким образом, множество всех

$$F(x) = \Phi(x) + C = \int_a^x f(t) dt + C$$

первообразных $F(x)$ можно записать как $F(x) = \int_a^x f(t) dt + C$, где C - произвольная постоянная.

Вычислим $F(a)$, используя первое свойство определенного

$$F(a) = \Phi(a) + C = \int_a^a f(t) dt + C = 0 + C = C$$

интеграла: $C = F(a)$, следовательно, $C = F(a)$.

Воспользуемся этим результатом при

$$F(b) = \Phi(b) + C = \int_a^b f(t) dt + C = \int_a^b f(t) dt + F(a)$$

вычислении $F(b)$: $F(b) = \int_a^b f(t) dt + F(a)$, то

$$F(b) = \int_a^b f(t) dt + F(a)$$

есть $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$. Это равенство дает доказываемую формулу Ньютона-Лейбница.

Приращение функции принято обозначать как $(F(x)) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Пользуясь этим

$$\int_a^b f(x) dx = (F(x)) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

обозначением, формула Ньютона-Лейбница примет вид

Для применения формулы Ньютона-Лейбница нам достаточно знать одну из первообразных $y = F(x)$ подынтегральной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и вычислить приращение этой первообразной на этом отрезке. Приведем несколько примеров вычисления определенных интегралов по формуле Ньютона-Лейбница для разъяснения.

Пример.

Вычислить значение определенного интеграла $\int_1^3 x^2 dx$ по формуле Ньютона-Лейбница.

Решение.

Для начала отметим, что подынтегральная функция $y = x^2$ непрерывна на отрезке $[1; 3]$, следовательно, интегрируема на нем. (Об интегрируемых функциях мы говорили в разделе функции, для которых существует определенный интеграл).

Из таблицы неопределенных интегралов видно, что для функции множество первообразных для всех действительных значений аргумента (следовательно, и для $x \in [1; 3]$) записывается

как $F(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$. Возьмем первообразную при $C = 0$: $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

Теперь осталось воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница для вычисления

определенного интеграла: $\int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}$.

Пример.

По формуле Ньютона-Лейбница вычислите определенный интеграл $\int_{-1}^2 x \cdot e^{x^2+1} dx$.

Решение.

Подынтегральная функция непрерывна на отрезке $[-1; 2]$, поэтому, интегрируема на нем.

Найдем неопределенный интеграл $\int x \cdot e^{x^2+1} dx$ методом подведения под знак

дифференциала: $\int x \cdot e^{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2+1} d(x^2 + 1) = \frac{1}{2} e^{x^2+1} + C$. Так мы получили множество

всех первообразных функции $y = x \cdot e^{x^2+1}$ для всех действительных x , следовательно, и для $x \in [-1; 2]$.

Возьмем первообразную при $C=0$ и применим формулу Ньютона-

$$\int_1^2 x \cdot e^{x^2-4} dx = \left(\frac{1}{2} e^{x^2-4} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} e^{2^2-4} - \frac{1}{2} e^{1^2-4} = \frac{1}{2} (e^0 - e^{-3}) = \frac{1}{2} (1 - e^{-3})$$

Лейбница:

4. Основные методы и приемы интегрирования

1. Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется **непосредственным интегрированием**. При сведении данного интеграла к табличному часто используются следующие преобразования дифференциала (операция «подведения под знак дифференциала»):

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \quad u, v \text{ — функции,}$$

$$d\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2} du, \quad u \neq 0 \text{ — число,}$$

$$u \cdot du = \frac{1}{2} d(u^2),$$

$$\cos u \, du = d(\sin u),$$

$$\sin u \, du = -d(\cos u),$$

$$\frac{1}{u} du = d(\ln u),$$

$$\frac{1}{\cos^2 u} du = d(\tan u).$$

Вообще, $f'(u)du = d(f(u))$. эта (формула очень часто используется при вычислении интегралов.

Пример:

Найти интеграл $\int \left(2x^2 + \frac{\cos x}{3} + 4^x - \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$

Решение. Воспользуемся свойствами интеграла и приведем данный интеграл к нескольким табличным.

$$\begin{aligned} \int \left(2x^2 + \frac{\cos x}{3} + 4^x - \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx &= \\ &= \int 2x^2 dx + \int \frac{\cos x}{3} dx + \int 4^x dx - \int \frac{4 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= 2 \int x^2 dx + \frac{1}{3} \int \cos x dx + \frac{4^x}{\ln 4} - 4 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= 2 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{1}{3} \cdot \sin x + \frac{4^x}{\ln 4} - 4 \cdot \arcsin x + C = \end{aligned}$$

$$= \frac{2x^3}{3} + \frac{\sin x}{3} + \frac{4^x}{\ln 4} - 4 \arcsin x + C$$

2. Интегрирование методом подстановки.

Суть метода заключается в том, что мы вводим новую переменную, выражаем подынтегральную функцию через эту переменную, в результате приходим к табличному (или более простому) виду интеграла.

Очень часто метод подстановки выручает при интегрировании тригонометрических функций и функций с радикалами.

Пример.

Найти неопределенный интеграл $\int \frac{1}{x\sqrt{2x-9}} dx$.

Решение.

Введем новую переменную $z = \sqrt{2x-9}$.

$$z^2 = 2x - 9 \Rightarrow x = \frac{z^2 + 9}{2}$$

$$dx = d\left(\frac{z^2 + 9}{2}\right) = \left(\frac{z^2 + 9}{2}\right)' dz = \frac{1}{2} \cdot 2z dz = z dz$$

Выразим x через z :

Выполняем подстановку полученных выражений в исходный

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}} = \int \frac{z dz}{\frac{z^2 + 9}{2} \cdot z} = 2 \int \frac{dz}{z^2 + 9}$$

интеграл:

$$2 \int \frac{dz}{z^2 + 9} = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{z}{3} + C$$

Из таблицы первообразных имеем

$$\frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{z}{3} + C = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x-9}}{3} + C$$

Осталось вернуться к исходной переменной x :

Ответ:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{2x-9}} dx = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x-9}}{3} + C$$

3. Интегрирование по частям.

Интегрирование по частям основано на представлении подынтегрального выражения в виде произведения $f(x)dx = u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot d(v(x))$ и последующем применении

формулы $\int u(x) \cdot d(v(x)) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot d(u(x))$. Этот метод является очень мощным инструментом интегрирования. В зависимости от подынтегральной функции, метод интегрирования по частям иногда приходится применять несколько раз подряд до получения результата. Для примера найдем множество первообразных функции арктангенс.

Пример.

Вычислить неопределенный интеграл $\int \operatorname{arctg}(2x) dx$.

Решение.

Пусть $u(x) = \operatorname{arctg}(2x)$, $d(v(x)) = dx$,

$$d(u(x)) = u'(x) dx = (\operatorname{arctg}(2x))' dx = \frac{2dx}{1+4x^2}$$

$$v(x) = \int d(v(x)) = \int dx = x$$

тогда

Следует отметить, что при нахождении функции $v(x)$ не прибавляют произвольную постоянную C .

Теперь применяем формулу интегрирования по

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg}(2x) dx &= u(x) \cdot v(x) - \int v(x) d(u(x)) = \\ &= x \cdot \operatorname{arctg}(2x) - \int \frac{2x dx}{1+4x^2} \end{aligned}$$

частям:

Последний интеграл вычислим по методу подведения под знак дифференциала.

Так как $d(1+4x^2) = (1+4x^2)' dx = 8x dx$, то $2x dx = \frac{1}{4} d(1+4x^2)$.

$$\int \frac{2x dx}{1+4x^2} = \frac{1}{4} \int \frac{d(1+4x^2)}{1+4x^2} = \int \frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{d(z)}{z} = \frac{1}{4} \ln|z| + C_1 = \left| \frac{1}{4} \ln|1+4x^2| \right| + C_1$$

Поэтому

$$\int \operatorname{arctg}(2x) dx = x \cdot \operatorname{arctg}(2x) - \int \frac{2x dx}{1+4x^2} =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg}(2x) - \left(\frac{1}{4} \ln|1+4x^2| + C_1 \right) =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg}(2x) - \frac{1}{4} \ln|1+4x^2| + C$$

Следовательно,

где $C = -C_1$.

Ответ:

$$\int \operatorname{arctg}(2x) dx = x \cdot \operatorname{arctg}(2x) - \frac{1}{4} \ln |1 + 4x^2| + C$$

5 Таблица основных интегралов

1. $\int x^N dx = \frac{x^{N+1}}{N+1} + C, \quad N \neq -1; \quad \int 0 dx = C; \quad \int (ax+b) dx = C;$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
3. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -\arctan(-x) + C_1; \quad (a=0);$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arcsin(-x) + C_1; \quad (a=0);$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1;$
6. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1;$
7. $\int \sin ax dx = -\cos ax + C;$
8. $\int \cos ax dx = \sin ax + C;$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C;$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C;$
11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad (a \neq 0);$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C;$
13. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + C, \quad (a \neq 0);$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = \arccos \frac{x}{a} + C_1, \quad (a > 0);$
15. $\int \operatorname{sh} ax dx = \operatorname{ch} ax + C;$
16. $\int \operatorname{ch} ax dx = \operatorname{sh} ax + C;$
17. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$
18. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{coth} x + C;$

uchim.org

Раздел 3. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти производную функции $y = \sin^6(4x^3 - 2)$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 3x^4 + \cos 5x$.
3. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{3}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$, $x_0 = 1$.
4. Материальная точка движется по закону $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t=5$ с. (Перемещение измеряется в метрах.)
5. Найти производную функции $y = \cos^4(6x^2 + 9)$.
6. Найти производную третьего порядка функции $y = 2x^5 - \sin 3x$.
7. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x - x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$, $x_0 = 2$.
8. Материальная точка движется по закону $x(t) = t^3 - 4t^2$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t=5$ с. (Перемещение измеряется в метрах.)
9. Найти производную функции $y = tg^5(3x^4 - 13)$.
10. Найти производную третьего порядка функции $y = 4x^3 - e^{5x}$.
11. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$, $x_0 = 1$.
12. Материальная точка движется по закону $x(t) = \frac{1}{4}t^4 + t^2$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t=5$ с. (Перемещение измеряется в метрах.)
13. Найти производную функции $y = ctg^4(5x^3 + 6)$.
14. Найти производную третьего порядка функции $y = 5x^4 - \cos 4x$.
15. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 1$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$, $x_0 = 2$.
16. Материальная точка движется по закону $x(t) = t^4 - 2t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t=5$ с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Найти неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования (для № 1-5).

1. $\int \left(5 \cos x - 3x^2 + \frac{1}{x} \right) dx$.
2. $\int \frac{3x^8 - x^5 + x^4}{x^5} dx$.
3. $\int (6^x \cdot 3^{2x} - 4) dx$.
4. $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$.
5. $\int \frac{dx}{1+16x^2}$.

Найти неопределенные интегралы методом подстановки (для № 6-8).

6. $\int (8x - 4)^3 dx$.

$$7. \int \frac{12x^3 + 5}{3x^4 + 5x - 3} dx.$$

$$8. \int x^5 \cdot e^{x^6} dx.$$

$$9. \text{Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям:} \\ \int (x + 5) \cos x dx.$$

Найти неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования (для № 1-5).

$$1. \int \left(6 \sin x + 4x^3 - \frac{1}{x} \right) dx.$$

$$2. \int \frac{x^9 - 3x^7 + 2x^6}{x^7} dx.$$

$$3. \int (7^x \cdot 2^{2x} + 5) dx.$$

$$4. \int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx.$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$$

Найти неопределенные интегралы методом подстановки (для № 6-8).

$$6. \int (7x + 5)^4 dx.$$

$$7. \int \frac{18x^2 - 3}{6x^3 - 3x + 8} dx.$$

$$8. \int x^7 \cdot e^{x^8} dx.$$

$$9. \text{Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям:} \\ \int (x - 2) \sin x dx.$$